

UDK 528.236 : 528.381  
Originalni naučni rad

# IZBOR OPTIMALNOG VISINSKOG SUSTAVA NA PRIMJERU BUDUĆEG NIVELMANA BOSNE I HERCEGOVINE

## SELECTION OF THE OPTIMAL HEIGHTS SYSTEM ON THE EXAMPLE OF BOSNIA AND HERZEGOVINA'S FUTURE LEVELING NETWORK

*Asim Bilajbegović, Medžida Mulić*

### SAŽETAK

*U radu su obavljena istraživanja o izboru najpovoljnijeg sustava visina za buduće državne nivelmanske mreže, na primjeru Bosne i Hercegovine. Istraživanja imaju općeniti karakter i mogu se implementirati i za nivelmane visoke točnosti drugih država, posebno onih iz regiona.*

*Ključne riječi: UELN, geopotencijalne kote, ortometrijske visine, normalne ortometrijske visine, normalne (Molodenski) visine.*

### ABSTRACT

*Research on the best appropriate heights system to be selected for the future state leveling networks on the example of Bosnia and Herzegovina is shown. Research has the general approach and could be applied for High Precision Leveling Networks for the other countries and especially those from the region.*

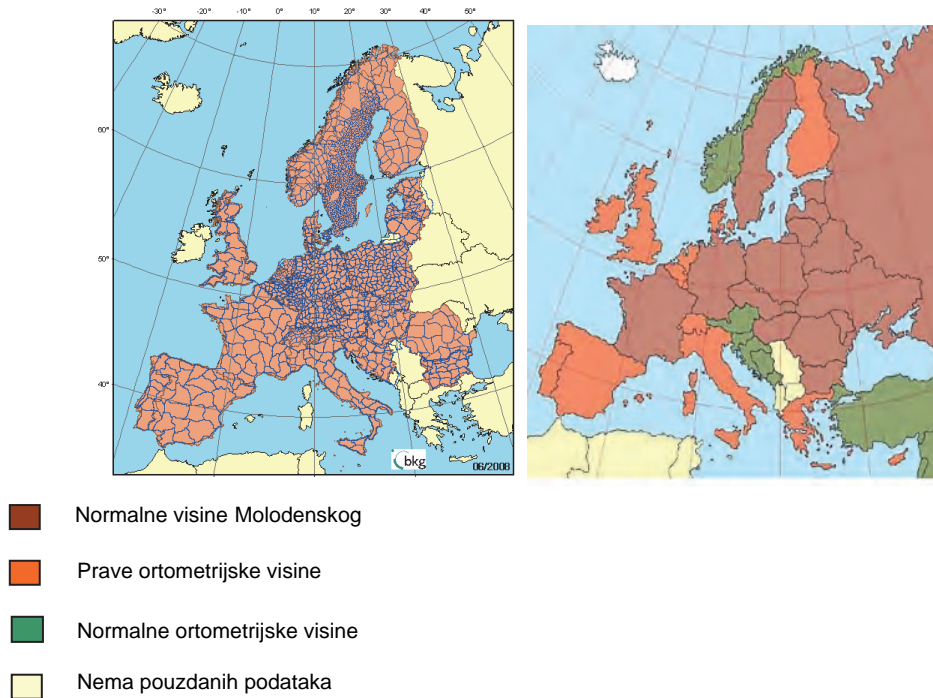
*Keywords: UELN, geopotential numbers, orthometric heights, normal orthometric heights, normal (Molodenski) heights.*

## 1. UVOD

Precizni geometrijski nivelman ima veliki praktični i znanstveni značaj. Nivelmanska mreža potrebna je ne samo kao oslonac za mnogobrojne izmjere, kod kojih se osim položaja točaka u horizontalnoj ravnini određuju i njihove apsolutne visine, nego i za rješavanje i objašnjenje mnogih problema geofizike i geologije. Razvijena i povezana nivelmanska mreža (npr. satelitskim metodama) preko svih kontinenata daje vrlo vrijedne informacije o obliku Zemlje, a ponovljeni nivelman pruža mogućnost za izučavanje kako lokalnih regionalnih tako i kontinentalnih vertikalnih gibanja Zemljine kore.

Poznato je da deformacije Zemljine kore mogu biti plastične i elastične. Plastične deformacije izazivaju tektonski pokreti kod kojih se Zemljino tlo ne vraća u prvobitni položaj, a javljaju se u dugim vremenskim epohama. Kod elastičnih deformacija Zemljina kora se vraća u prvobitno stanje. Upravo ponovljeni precizni nivelmani omogućuju nam određivanje veličine pomjeranja Zemljinog tla. Promjene u otklonu vertikala izazvane pomjeranjem podzemnih masa, također se mogu konstatirati na osnovi sustavnog ponavljanja preciznog nivelmana na određenim područjima. Zbog toga bi trebalo nivelman visoke točnosti (NVT) ponoviti svakih dvadesetak godina. Kako su normalne ortometrijske visine uvedene u 19. stoljeću, mnoge države posvetile

su veliku pažnju odabiru fizikalnog visinskog sustava koji bi bio adekvatan u 20. i 21. stoljeću. Tako su Austrija i Švicarska izabrale pravi ortometrijski sustav visina, a Njemačka je od 1992. godine uvela normalne visine (Molodenski visine), kao što pokazuje slika 1. Evropska nivelmanska mreža (UELN, United European Levelling Network) izjednačena je u sustavu geopotencijalnih kota. Pregled korištenih visinskih sustava u Evropi dat je na slici 1 (desno).



Slika 1: UELN mreža ([www.bkg.bund.de](http://www.bkg.bund.de)) – lijevo, pregled korištenih visinskih sustava u Evropi (Idhe, 2006) - desno

U strogo definirane visine spadaju: prave ortometrijske, dinamičke i normalne, a približno definirane su normalne ortometrijske visine (Idhe, 2006). Tablica 1 pokazuje svojstva strogo definiranih visina.

Tablica 1: Svojstva strogo definiranih visina

	Strogo definirane visine		
	prave ortometrijske	dinamičke	normalne visine (Molodenski)
Visine iznad:	geoida	-----	kvazigeoida
Neovisne o putu niveliranja	da	da	da
Mogućnost zamjene pada	mala	ne	vrlo mala
Potrebna redukcija mjerenih visinskih razlika	mala	vrlo velika	vrlo mala

Uvjet 5 iz poglavlja 2 strogo zadovoljavaju samo geopotencijalne kote i dinamičke visine. Cilj ovog rada je upravo uvesti znanstvene kriterije i dokazati koji je sustav visina najpodesniji za budući III NVT Bosne i Hercegovine koristeći parametre Geodetskog referentnog sustava GRS 80 (Geodetic Reference System).

## 2. OSNOVNI UVJETI PRI ODABIRU VISINSKIH SUSTAVA

Geometrijski nivelman spada u red najtočnijih geodetskih mjerenja. Radi toga, pri obradi njegovih rezultata treba uzeti u obzir i mnoge pojedinosti teorije oblika Zemlje, koji su često irelevantni za ostale geodetske radove. Zato, odabiru visinskog sustava u kojem se kasnije obrađuju rezultati mjerenja (tj. niveliranja), treba pokloniti veliku pažnju.

Osnovni uvjeti koje bi trebao zadovoljiti visinski sustav mogu se ovako formulirati (Bilajbegović i dr., 2008):

1. visine točaka trebaju biti jednoznačne i neovisne od puta niveliranja,
2. visine trebaju biti jednoznačno određene na osnovi rezultata mjerenja na fizičkoj površini Zemlje, bez uvođenja bilo kakvih hipoteza o unutarnjoj građi (gustoći) Zemlje.

Osim toga praktično korištenje rezultata nivelmana zahtijeva da:

3. popravke izmjerenih visinskih razlika trebaju biti male, tako da se pri obradi nivelmana nižih redova mogu zanemariti.

Geodetske visine  $h$  sastoje iz dva dijela (vidjeti sliku 2):

$$\begin{aligned} h^A &= H_g^A + N^A \quad \text{ili} \\ h^A &= H_N^A + \zeta^A \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdje je:

$H_g^A$  - prava ortometrijska visina točke  $A$ ,

$N^A$  - visina (undulacija) geoida u odnosu na referentni elipsoid u točki  $A$ ,

$H_N^A$  - normalna ili visina Molodenskog točke  $A$ ,

$\zeta^A$  - anomalija visine ili visina kvazigeoida u odnosu na referentni elipsoid.

Iz definicije geodetske visine nameće se 4. uvjet:

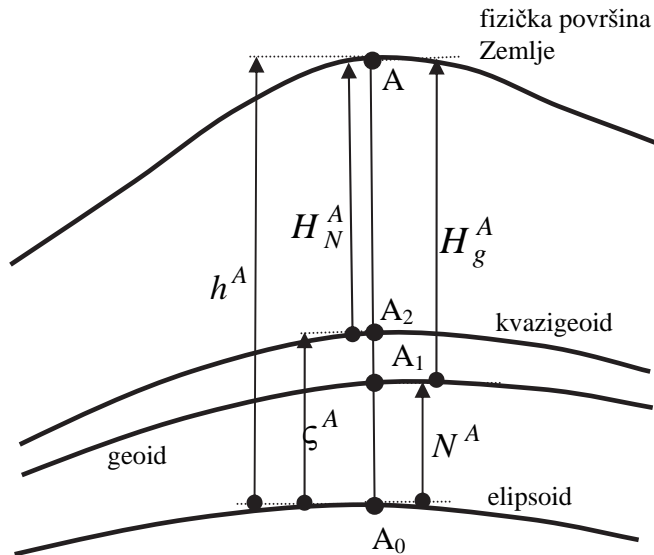
4. u izabranom sustavu visina treba se „geoidni“ dio geodetske visine, odnosno undulacija geoida ili anomalija visine, dovoljno točno i lagano (udobno) računati.

Radi raznih tehničkih zahtjeva u strojogradnji, hidrotehnici, izgradnji željezničkih pruga itd., poželjan je sljedeći uvjet:

5. Visine točaka koje pripadaju istoj nivo plohi moraju biti jednake, odnosno konstantne.

Izbor visinskog sustava neke države naravno ovisi i o podacima (točnosti) ubrzanja sile teže uzduž nivelmanskih vlakova, kao i o podacima (točnosti) gustoće Zemlje između njene fizičke površine i geoida.

Navedeni uvjeti 3. i 5. su proturječni, te za najbolji sustav visina treba tražiti kompromis između navedenih 5 osnovnih uvjeta.



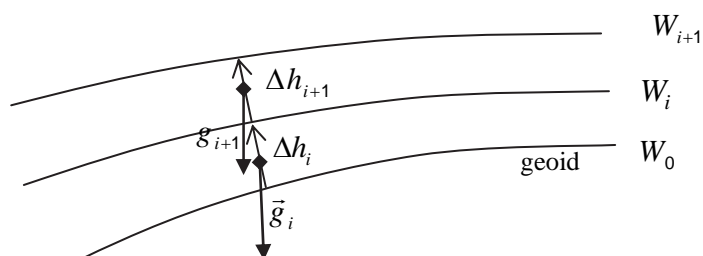
Slika 2: Geodetska  $h^A$ , ortometrijska  $H_g^A$  i normalna visina  $H_N^A$

Iz Teorijske geodezije i iz mehanike poznat je izraz za potencijal, odnosno potencijal sile teže:

$$\text{Potencijal} = \frac{\text{rad}}{\text{masa}} = \frac{\text{sila} \times \text{put}}{\text{masa}} = \frac{\text{masa} \times \text{ubrzanje} \times \text{put}}{\text{masa}} = \text{ubrzanje} \times \text{put} \left[ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \right]. \quad (2.2)$$

Nivo plohe su plohe jednakog (konstantnog) potencijala, te se razlika potencijala bliskih ploha može izraziti formulom (2.3), (vidjeti sliku 3):

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_{i+1} - W_i = \text{konstanta} = C_1 \\ dW &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta W = -g \cdot dh \approx C. \end{aligned} \quad \text{i} \quad (2.3)$$

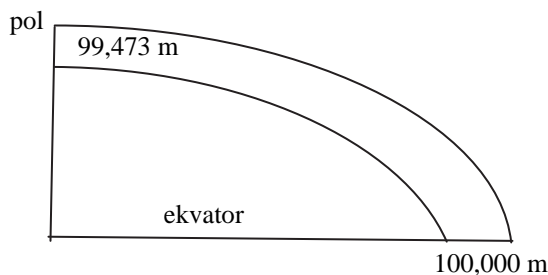


Slika 3: Potencijal bliskih nivo ploha

Ako se iz GRS80 preuzmu ubrzanja sile teže na polu  $\gamma_p = 9,832\,186\,3685\text{ ms}^{-2}$  i na ekvatoru  $\gamma_e = 9,780\,326\,7715\text{ ms}^{-2}$  te primijeni formula (2.3) dobit će se

$$\gamma_e \cdot \Delta h_e = \gamma_p \cdot \Delta h_p, \quad (2.4)$$

gdje su:  $\Delta h_e$  i  $\Delta h_p$  visine nivo plohe nad geoidom na ekvatoru i polu. Na primjer, ako je  $\Delta h_e = 100\text{ m}$  iz izraza (2.4) se dobije da je  $\Delta h_p = 99,473\text{ m}$ . To je razlog za uvođenje fizikalnih visina u geodeziji.



Slika 4: Konvergencija nivo ploha

Danas se u praksi upotrebljavaju četiri vrste visina:

- geopotencijalne kote,
- normalne ili Molodenski visine,
- prave ortometrijske i
- normalne ortometrijske visine.

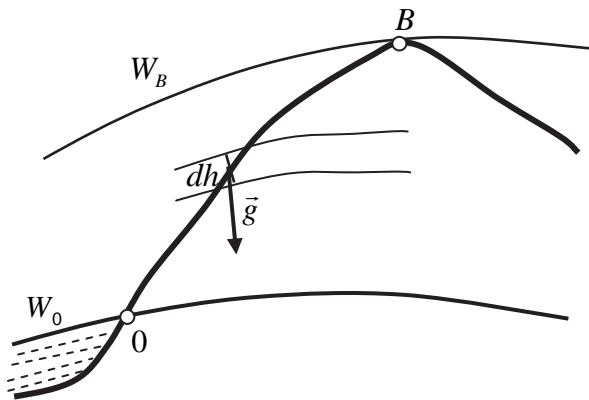
Dinamičke visine nisu navedene jer nisu korištene u mrežama državnih nivelmana.

Ukratko će se opisati prethodno navedeni visinski sustavi, radi analize utjecaja relevantnih ulaznih parametara na njihovu točnost, a što će poslužiti kao kriterij za odabir najpogodnijeg sustava.

## 2.1 Geopotencijalne kote

Označi li se potencijal plohe geoida s  $W_0$ , a u točki  $B$  na fizičkoj površini Zemlje  $W_B$  te se primijeni jednadžba (2.2) a prema slici 5 dobije se:

$$W_B - W_0 = -\int_0^B g \cdot dh, \text{ odnosno } C_B = -(W_B - W_0) = W_0 - W_B = \int_0^B g dh. \quad (2.5)$$



Slika 5: Geoid - nulta nivo ploha i nivo ploha točke B

Izraz  $C_B = -(W_B - W_0) = W_0 - W_B = \int_0^B g dh$  naziva se geopotencijalna kota ili broj<sup>1</sup> a dobio je

naziv na zasjedanju Međunarodne asocijacije za geodeziju (International Association of Geodesy - IAG) koja je održana 1954. godine u Rimu.

Osnovna jedinica za izražavanje geopotencijala, odnosno geopotencijalne kote je kilogalmetar, tj. ( $\text{Kgalm} = 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$  ili u SI sustavu  $\text{Kgalm} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ). Svaka nova ploha ima konstantnu geopotencijalnu kotu, a geopotencijalna kota geoida  $C_0 = 0$ . Kako se u praksi mjeri  $\Delta h$  a ne  $dh$  te se ubrzanje sile teže mjeri na prikladnim udaljenostima uzduž puta niveliranja, nemoguće je čisto teorijski odrediti integral po formuli (2.5), pa se praktično računanje geopotencijalne kote svodi na računanje zbroja:

$$C_B = \sum_0^B g \cdot \Delta h. \quad (2.6)$$

Razlika geopotencijalnih kota dviju točaka na površini Zemlje prema formulama (2.5) i (2.6) izgleda:

<sup>1</sup> fran. cote géopotentielle; eng. geopotential number

$$\Delta C_{AB} = C_B - C_A = \int_A^B g dh \approx \sum_A^B g \cdot \Delta h. \quad (2.7)$$

Razlika geopotencijalnih kota predočena je u obliku zbroja umnožaka ubrzanja sile teže i pojedinačno izmjerenih djelića visinske razlike. Očigledno se nameće pitanje koju vrijednost ubrzanja sile teže treba uzeti u račun? Slijedi logičan odgovor: srednju vrijednost  $\bar{g}_i$  na djeliću visinske razlike  $\Delta h_i$ :

$$\bar{g}_i = \frac{g_{i-1} + g_i}{2}. \quad (2.8)$$

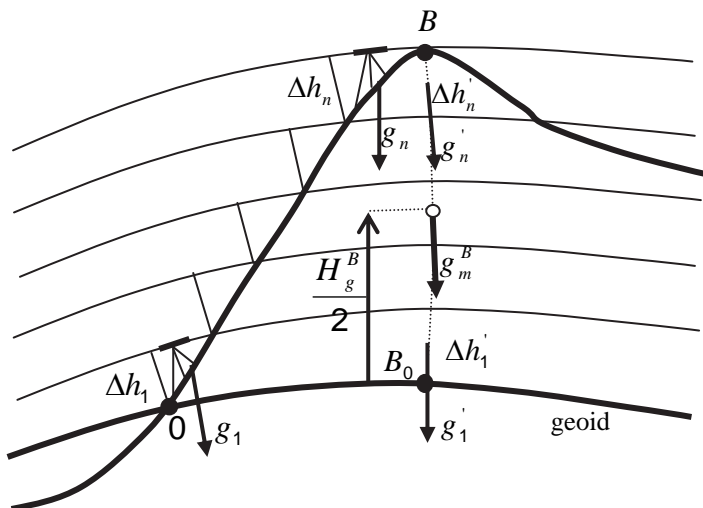
Ako između točaka  $A$  i  $B$  ima  $n$  dijelova  $\Delta h_i$ , onda se ukupna razlika geopotencijalnih kota dobije izrazom:

$$\Delta C_{AB} \approx \sum_{i=1}^n \bar{g}_i \cdot \Delta h_i. \quad (2.9)$$

Razmatrajući izraz za računanje geopotencijalnih kota (2.5), primjećuje se da one ne ovise o putu niveliranja, što zadovoljava prvi uvjet za visinski sustav. Upravo u ovom visinskom sustavu izjednačena je Evropska nivelmanska mreža UELN. Iz ovog visinskog sustava mogu se izračunati visine u svim ostalim visinskim sustavima. Zbog toga je potrebno novi NVT Bosne i Hercegovine obraditi i u ovom sustavu visina.

## 2.2 Prave ortometrijske visine

Prava ortometrijska visina je dužina dijela težišnice (vertikale) koja polazi od točke na fizičkoj površini Zemlje ( $B$ ) do njene projekcije na geoidu ( $B_0$ ), kao što pokazuje slika 6.



Slika 6: Prave ortometrijske visine

Obilježe li se pripadajući odsječci visinske razlike uzduž težišnice točke  $B$  s  $\Delta h_1', \Delta h_2', \dots, \Delta h_n'$  a ubrzanja sile teže s  $g_1', g_2', \dots, g_n'$ , na osnovu formule (2.5) i mjerenih visinskih razlika i ubrzanja sile teže mogu se napisati sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} g_1 \cdot \Delta h_1 &= g_1' \cdot \Delta h_1' \\ g_2 \cdot \Delta h_2 &= g_2' \cdot \Delta h_2' \\ &\vdots \\ g_n \cdot \Delta h_n &= g_n' \cdot \Delta h_n'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Zbrajanjem (2.10) dobit će se sljedeće:

$$\sum_{i=1}^n g \cdot \Delta h = \sum_{i=1}^n g' \cdot \Delta h' = \sum_0^B g \cdot \Delta h = \sum_{B_0}^B g' \cdot \Delta h'. \quad (2.11)$$

Ako se sa konačnih odsječaka visinske razlike  $\Delta h_i$  i  $\Delta h_i'$  pređe na beskonačno male veličine  $dh_i$  i  $dh_i'$  tada suma (2.11) prelazi u integral:

$$\int_0^B g dh = \int_{B_0}^B g' dh'. \quad (2.12)$$

Ako se na desnu stranu izraza (2.12) primijeni teorem srednje vrijednosti dobit će se:

$$\int_0^B g dh = g_m^B \int_{B_0}^B dh', \quad (2.13)$$

gdje je  $g_m^B$  srednja vrijednost ubrzanja sile teže duž težišnice  $B_0B$ . Upravo integral desne strane izraza (2.13) predstavlja pravu ortometrijsku visinu točke  $B$ , koja je jednaka dužini luka težišnice  $B_0B$ :

$$\int_{B_0}^B dh' = H_g^B. \quad (2.14)$$

Uvođenjem izraza (2.14) u (2.13) dobije se:

$$\int_0^B g dh = g_m^B \cdot H_g^B, \Rightarrow H_g^B = \frac{1}{g_m^B} \int_0^B g dh. \quad (2.15)$$

Integral u (2.14) je zapravo geopotencijalna kota  $C_B$  točke  $B$ , te se (2.15) može napisati u sljedećem obliku:

$$H_g^B = \frac{C_B}{g_m^B} = \frac{W_0 - W_B}{g_m^B}. \quad (2.16)$$



Nije moguće mjeriti ubrzanja sile teže duž težišnice, te su stoga mnogi autori predlagali način računanja  $g_m^B$  (kao npr. Helmert, Niethammer, Ledersteger, Ramsayer i drugi), gdje su uvedene različite pretpostavke o gustoći slojeva Zemljine kore iznad geoida. Za računanje pravih ortometrijskih visina očigledno bi trebali imati trodimenzionalni model gustoće Zemlje između geoida i fizičke površine Zemlje. Ukoliko ove vrijednosti ne postoje mogu se samo uvoditi hipoteze o unutarnjem sastavu Zemlje, čime se ne zadovoljava drugi uvjet visinskog sustava, kao što je izneseno u poglavlju 2.

Ako nemamo geopotencijalne razlike, izraz (2.15) nije prikladan za računanja korekcija niveliranih visinskih razlika. Zbog toga je potrebno dobiti prikladne formule za računanja pravih ortometrijskih visinskih razlika, iz izraza (2.15) i (2.16). Izvod formula vidjeti u Bilajbegović i dr. (2008), a ovdje se navodi krajnja formula koja je potrebna za razmatranja u poglavljima 3 i 4:

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_M - G_0}{G_0} \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_m^A - G_0}{G_0} H^A - \frac{g_m^B - G_0}{G_0} H^B, \quad (2.17)$$

gdje su:

$\Delta H_g^{AB}$  prava ortometrijska visinska razlika,

$\Delta H_{mjer.}^{AB}$  mjerena visinska razlika,

$g_M = \frac{g_A + g_B}{2}$  srednja vrijednost mjenenog ubrzanja sile teže između točaka A i B,

$g_m^A = g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2}$ ,  $g_m^B = g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2}$  srednje vrijednosti računatog ubrzanja sile teže na težišnicama točaka A i B.

Iz Fizikalne geodezije je poznata formula za računanje gradijenta ubrzanja sile teže (Torge, 2012):

$$\frac{dg}{dh} = \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho, \quad (2.18)$$

gdje su:

$\frac{d\gamma}{dh}$  gradijent normalnog ubrzanja sile teže,

$G = (6,67259 \pm 0,00085) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  gravitacijska konstanta i

$\rho$  gustoća Zemlje između geoida i fizičke površine Zemlje.

Ukoliko se ne raspolaže s trodimenzionalnim modelom gustoće površinskih slojeva Zemlje tada se za srednju gustoću uzima  $\rho = 2670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Za GRS80 sustav gradijent normalnog ubrzanja sile teže iznosi prema (Heck, 2003) kao što slijedi:

$$\left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0 = -0,30877 \cdot (1 - 0,00139 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-2}. \quad (2.19)$$

Ukoliko se uzme i drugi član razvoja u red tada se normalno ubrzanje sile teže na površini Zemlje računa po formuli:

$$\gamma = \gamma_0 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0 \cdot H + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)_0 \cdot H^2 + \dots \quad (2.20)$$

i za GRS80:

$$\left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)_0 = 1,44 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$\gamma_0 = 9,78032677(1 + 0,005\,279\,041 \sin^2 \varphi + 0,000\,023\,272 \sin^4 \varphi + 0,000\,000\,126 \sin^6 \varphi) \text{ ms}^{-2}. \quad (2.21)$$

## 2.3 Normalne ortometrijske visine

Analogno pravim ortometrijskim visinama definirane su normalne ortometrijske visine, gdje su ubrzanja sile teže zamijenjena s normalnim ubrzanjem sile teže:

$$H_\gamma^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B \gamma \cdot dh. \quad (2.22)$$

Za praktičnu primjenu neophodno je izvesti formule za korekciju mjerenih visinskih razlika za područje Bosne i Hercegovine koristeći GRS 80. Izvod se može naći u Bilajbegović i dr. (2008), a ovdje se iznosi samo krajnja formula:

$$\Delta H_\gamma^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + C_\gamma^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \cdot \sin 2\varphi \cdot d\varphi) \cdot H. \quad (2.23)$$

Za praktična računanja se može primijeniti formula:

$$\begin{aligned} \Delta H_\gamma^{AB} &= \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005\,276\,805\,941 \cdot \sin 2\varphi \cdot \frac{d\varphi''}{\rho''}) \cdot H \\ &= \Delta H_{mjer.}^{AB} - 0,000\,000\,025\,582\,68 \sin 2\varphi_m \cdot \Delta\varphi'' \cdot H_m \text{ ili za korekciju u mm} \quad (2.24) \\ C_\gamma^{AB} &= -0,000\,025\,582\,68 \sin 2\varphi_m \cdot \Delta\varphi'' \cdot H_m \quad [\text{mm}], \end{aligned}$$

gdje su:

$\Delta H_\gamma^{AB}$  normalna ortometrijska visinska razlika,

$\Delta H_{mjer.}^{AB}$  mjerena visinska razlika,

$\varphi_A$  i  $\varphi_B$  elipsoidne širine točaka A i B,

$H_A$  i  $H_B$  visine točaka A i B,

$\rho'' = 205265$  i

$$\varphi_m = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}, \quad \Delta\varphi'' = \varphi_B'' - \varphi_A'' \text{ i } H_m = \frac{H_A + H_B}{2}.$$

U drugom izrazu (2.24)  $\Delta\varphi$  se izražava u sekundama,  $H_m$  u metrima a korekcija se dobije u milimetrima.

## 2.4 Normalne ili visine Molodenskog

Prema definiciji normalne visine računaju se po sljedećoj formuli:

$$H_N^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B g \cdot dh. \quad (2.25)$$

Uvede li se supstitucija  $g = g - \gamma + \gamma$  u izraz (2.25) dobije se:

$$H_N^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B \gamma \cdot dh + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B (g - \gamma) \cdot dh. \quad (2.26)$$

Prvi dio desne strane izraza (2.26) je zapravo normalna ortometrijska visina, (vidjeti izraz (2.22)). Za točku  $A$  može se analogno izrazu (2.26) napisati izraz za normalnu visinu:

$$H_N^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A \gamma \cdot dh + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A (g - \gamma) \cdot dh. \quad (2.27)$$

Normalna visinska razlika između točaka  $A$  i  $B$  dobit će se računanjem razlike izraza (2.26) i (2.27):

$$\Delta H_N^{AB} = H_N^B - H_N^A = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B \gamma \cdot dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A \gamma \cdot dh + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B (g - \gamma) \cdot dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_0^A (g - \gamma) \cdot dh. \quad (2.28)$$

Uvede li se (2.22) u (2.28) i primjenom izraza teorema srednjih vrijednosti na (2.28) dobije se:

$$\Delta H_N^{AB} = H_N^B - H_N^A = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005\,276\,805\,941 \cdot \sin 2\varphi_m \cdot d\varphi) \cdot H_m + \int_A^B \frac{(g - \gamma)dh}{\gamma_m},$$

odnosno:

$$\Delta H_N^{AB} = H_N^B - H_N^A = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005\,276\,805\,941 \cdot \sin 2\varphi_m \cdot d\varphi) \cdot H_m + \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB}, \quad (2.29)$$

gdje su:

$$(g - \gamma)_M = \frac{(g_B - \gamma_B) + (g_A - \gamma_A)}{2},$$

$$\gamma_m = \frac{(\gamma_m^A + \gamma_m^B)}{2},$$

$g_A$  i  $g_B$  mjerena ubrzanja sile teže u točkama  $A$  i  $B$ ,

$$\varphi_m = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} \quad \text{srednja širina nivelmanske strane i}$$

$$H_m = \frac{H^A + H^B}{2} \quad \text{srednja visina nivelmanske strane.}$$

Normalna ubrzanja sile teže u točkama  $A$  i  $B$  prema sustavu GRS80 računaju se po sljedećim formulama:

$$\begin{aligned}\gamma_A &= \gamma_0^A + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^A \cdot H^A, \\ \gamma_B &= \gamma_0^B + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^B \cdot H^B.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Izrazi za računanja normalnih vrijednosti ubrzanja sile teže na elipsoidu  $\gamma_0$  dati izrazom (2.21) (Heck, 2003; Torge i Müller, 2012):

$$\begin{aligned}\gamma_0^A &= 9,78032677(1 + 0,005\,279\,041\sin^2\varphi_A + 0,000\,023\,272\sin^4\varphi_A + 0,000\,000\,126\sin^6\varphi_A)\text{ms}^{-2}, \\ \gamma_0^B &= 9,78032677(1 + 0,005\,279\,041\sin^2\varphi_B + 0,000\,023\,272\sin^4\varphi_B + 0,000\,000\,126\sin^6\varphi_B)\text{ms}^{-2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Derivacije normalnog ubrzanja sile teže za GRS80 računaju se pomoću formule (2.19):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^A &= -0,30877 \cdot (1 - 0,00139 \cdot \sin^2\varphi_A) \cdot 10^{-5}\text{s}^{-2}; \\ \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^B &= -0,30877 \cdot (1 - 0,00139 \cdot \sin^2\varphi_B) \cdot 10^{-5}\text{s}^{-2}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Srednje vrijednosti normalnog ubrzanja sile teže duž težišnice točaka A i B glase:

$$\begin{aligned}\gamma_m^A &= \gamma_0^A + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^A \cdot \frac{H^A}{2}, \\ \gamma_m^B &= \gamma_0^B + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^B \cdot \frac{H^B}{2}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

U formuli (2.31) se može zanemariti član  $0,000000126\sin^6\varphi$ . Međutim, za kompjuterska računanja poželjno ih je računati.

Računanja  $\gamma_m^A$  i  $\gamma_m^B$  mogu se kontrolirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\gamma_m^A &= \gamma_0^A + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^A \cdot \frac{H^A}{2} = \frac{\gamma_0^A + \gamma_A}{2}, \\ \gamma_m^B &= \gamma_0^B + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0^B \cdot \frac{H^B}{2} = \frac{\gamma_0^B + \gamma_B}{2}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Dakle, za odabir najpogodnijeg visinskog sustava treba analizirati koje od 5 osnovnih uvjeta izabrani sustav zadovoljava, te kako na njega utječu pogreške relevantnih ulaznih parametara kao npr.: pogreške gustoće površinskih slojeva Zemlje, pogreške ubrzanja sile teže, pogreške visina krajnjih točaka nivelmanske strane (zbog računanja korekcija). Osim toga, treba odgovoriti i na pitanje „da li treba ubrzanja sile teže korigirati na visinu repera nivelmanske strane“ i slično. Posebno je važno uzeti u obzir podatke kojim raspolaže država u kojoj se treba provesti nivelman (da li postoje karte anomalija ubrzanja sile teže i koja je njihova točnost, podatke o gustoći površinskih slojeva Zemlje i slično)

U 21. stoljeću očito dolaze u obzir sljedeći sustavi za analizu: sustav geopotencijalnih kota, pravih ortometrijskih visina i sustav normalnih ili visina Molodenskog.

### 3. UTJECAJ RELEVANTNIH ULAZNIH PODATKA NA TOČNOST FIZIKALNIH VISINA

Da bi se došlo do razumnog prijedloga izbora visinskog sustava za Bosnu i Hercegovinu, u sljedećim poglavljima će se analizirati utjecaj relevantnih ulaznih parametara na različite visinske sustave. Razmotrit će se prave ortometrijske visine.

#### 3.1 Utjecaj relevantnih ulaznih podataka na točnost pravih ortometrijskih visinskih razlika, odnosno visina

##### 3.1.1 Utjecaj gustoće površinskih slojeva Zemlje na točnost pravih ortometrijskih visinskih razlika, odnosno visina

Prava ortometrijska visinska razlika računa se po ranije napisanoj formuli (2.17):

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_M - G_0}{G_0} \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_m^A - G_0}{G_0} H^A - \frac{g_m^B - G_0}{G_0} H^B, \quad (2.17)$$

gdje su:

$$g_M = \frac{g_A + g_B}{2},$$

$$g_m^A = g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2}, \quad g_m^B = g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2}.$$

Preuređen izraz (2.17) glasi:

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{\frac{g_A + g_B}{2} - G_0}{G_0} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^A - \frac{g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^B, \quad (3.1)$$

odnosno

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{\frac{g_A + g_B}{2} - G_0}{G_0} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A - \left( \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho \right) \cdot \frac{H^A}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^A - \frac{g_B - \left( \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho \right) \cdot \frac{H^B}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^B. \quad (3.2)$$

Za GRS 80 sustav vrijedi sljedeće:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho = -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} + 4\pi G\rho.$$

Diferenciranjem izraza (3.2) po gustoći  $\rho$  dobije se:

$$d\Delta H_{g^A}^{AB} = \frac{\left(-4\pi G \cdot d\rho \cdot \frac{H^A}{2}\right) \cdot H^A}{G_0} - \frac{\left(-4\pi G \cdot d\rho \cdot \frac{H^B}{2}\right) \cdot H^B}{G_0}. \quad (3.3)$$

Primjena zakona o prirastu pogrešaka na (3.3) daje:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 &= \left(-2\pi G \cdot H^A \cdot \frac{H^A}{G_0}\right)^2 \cdot \sigma_{\rho}^2 + \left(-2\pi G \cdot H^B \cdot \frac{H^B}{G_0}\right)^2 \cdot \sigma_{\rho}^2, \\ \sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 &= \left[\left(\frac{4\pi^2 G^2 \cdot H_A^2 \cdot H_A^2}{G_0^2}\right) + \left(\frac{4\pi^2 G^2 \cdot H_B^2 \cdot H_B^2}{G_0^2}\right)\right] \sigma_{\rho}^2, \\ \sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 &= \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} (H_A^4 + H_B^4) \cdot \sigma_{\rho}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

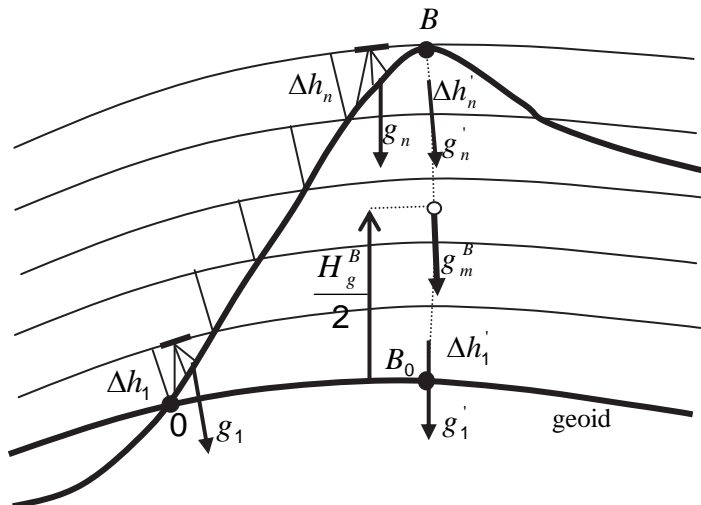
Da se dobije numerički uvid o utjecaju gustoće slojeva Zemljine kore razmotrit će se utjecaj na ortometrijsku visinu od 1000 m, koja se recimo dobila niveliranjem 10 nivelmanskih strana s visinskom razlikom od 100 m, kao što pokazuje slika 7:

$$H_g^{1000} = 0 + \Delta H_g^{0,100} + \Delta H_g^{100,200} + \Delta H_g^{200,300} + \dots + \Delta H_g^{900,1000}. \quad (3.5)$$

Primjenom zakona o prirastu pogrešaka na (3.5) dobije se:

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = \sigma_{\Delta H_g^{0,100}}^2 + \sigma_{\Delta H_g^{100,200}}^2 + \dots + \sigma_{\Delta H_g^{900,1000}}^2. \quad (3.6)$$

Obzirom da Bosna i Hercegovina ima teritorij uz Jadransko more predloženo razmatranje ne odstupa od realnosti, visine se uglavnom kreću od 0 m pa do 1000 m.



Slika 7: Ortometrijske visine i nivo plohe

Uvođenjem izraza (3.4) u (3.6) dobit će se:

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = \left[ \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot (H_0^4 + H_{100}^4) + \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot (H_{100}^4 + H_{200}^4) + \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot (H_{200}^4 + H_{300}^4) + \dots \right] \cdot \sigma_\rho^2,$$

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = \left[ \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot H_{(800+H_{900}^4)} + \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot (H_{900}^4 + H_{1000}^4) \right] \cdot \sigma_\rho^2,$$

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = \left[ \frac{8\pi^2 G^2}{G_0^2} \cdot (H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + \dots + H_{n-1}^4) + \frac{4\pi^2 G^2}{G_0^2} H_n^4 \right] \cdot \sigma_\rho^2. \quad (3.7)$$

(Visine  $H_0 = 0$  m,  $H_1 = 100$  m,  $H_{n-1} = 900$  m i  $H_n = 1000$  m).

Ako se uzme standardno odstupanje gustoće slojeva Zemljine kore od

$$\sigma_\rho = 200 \text{ kg/m}^3,$$

što odgovara relativnoj pogrešci od 7,5 % i za  $G_0 = \gamma_0^{\varphi=43^\circ 52'} = 9,805174 \text{ ms}^{-2}$  (vrijednost normalnog ubrzanje sile teže za Sarajevo) dobije se:

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = 7,434803 \cdot 10^{-9} \cdot \sigma_\rho^2,$$

odnosno

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = 0,0002974 \text{ m}^2,$$

$$\sigma_{H_g^{1000}} = 0,01725 \text{ m}.$$

Slična razmatranja mogu se izvesti uzimajući nivelirane visinske razlike od 50, odnosno 25 metara. Rezultati takvih razmatranja pokazani su u tablici 2. Visinske razlike od 25 m su vjerojatnije za BiH prilike.

Pogreška gustoće tla od  $200 \text{ kg/m}^3$  ili 7,49% prosječne vrijednosti gustoće površinskih slojeva Zemlje uzrokuje pogrešku prave ortometrijske visine od 1,7 cm, odnosno 2,4 i 3,4 cm (kad su visinske razlike nivelmanskih strana bile 50 i 25 m respektivno) za točke na visini od 1000 m, kao što pokazuje tablica 2.

Tablica 2: Utjecaj gustoće na prave ortometrijske visine

$\sigma_\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ $G_0 = 9,805174 \text{ ms}^{-2}$	Stand. odstupanje vis. od 1000 m
$\Delta H = 100 \text{ m}$	0,0173 m
$\Delta H = 50 \text{ m}$	0,0242 m
$\Delta H = 25 \text{ m}$	0,0342 m

Drugim riječima, ukoliko se ne raspolože pouzdanim trodimenzionalnim modelom gustoće Zemljine kore između fizičke površine do geoida, prave ortometrijske visine mogu biti pogrešne i do 4 cm.

### 3.1.2 Utjecaj ubrzanja sile teže na prave ortometrijske visine

Ova razmatranja počet će od formule za računanja prave ortometrijske razlike:

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A + g_B - G_0}{G_0} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^A - \frac{g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^B \quad (3.7)$$

ili

$$\Delta H_g^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A + g_B}{2G_0} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} - \Delta H_{mjer.}^{AB} + \frac{g_A}{G_0} \cdot H^A + \frac{-\frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^A - \frac{g_B}{G_0} \cdot H^B - \frac{-\frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} - G_0}{G_0} \cdot H^B.$$

Derivacijom prethodne formule po  $g$  dobije se:

$$d\Delta H_g^{AB} = \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} \cdot dg_A + \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} \cdot dg_B + \frac{H^A}{G_0} \cdot dg_A - \frac{H^B}{G_0} \cdot dg_B,$$

$$d\Delta H_g^{AB} = \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} + \frac{H^A}{G_0} \right) \cdot dg_A + \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} - \frac{H^B}{G_0} \right) \cdot dg_B. \quad (3.8)$$

Prelaskom na varijance slijedi:

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} + \frac{H^A}{G_0} \right)^2 \cdot \sigma_{gA}^2 + \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} - \frac{H^B}{G_0} \right)^2 \cdot \sigma_{gB}^2 \quad (3.9)$$

$$\sigma_{gA} \approx \sigma_{gB} \approx \sigma_g$$

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \left[ \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} + \frac{H^A}{G_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2G_0} - \frac{H^B}{G_0} \right)^2 \right] \cdot \sigma_g^2 \quad (3.10)$$

ili

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \left[ \left( \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{4G_0^2} + \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{G_0} \cdot \frac{H^A}{G_0} + \frac{H_A^2}{G_0^2} \right) + \left( \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{4G_0^2} - \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{G_0} \cdot \frac{H^B}{G_0} + \frac{H_B^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2,$$



$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\Delta H_g^{AB}} &= \left[ \left( \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{4G_0^2} + \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{G_0^2} \cdot H^A + \frac{H_A^2}{G_0^2} \right) + \left( \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{4G_0^2} - \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{G_0^2} \cdot H^B + \frac{H_B^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2 \\
&= \left[ \left( \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{2G_0^2} + \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{G_0^2} \cdot (H^A - H^B) + \frac{H_A^2}{G_0^2} + \frac{H_B^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2 \\
&= \left[ \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{2G_0^2} - \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{G_0^2} + \frac{H_A^2}{G_0^2} + \frac{H_B^2}{G_0^2} \right] \cdot \sigma_g^2, \\
\sigma^2_{\Delta H_g^{AB}} &= \left[ \frac{-(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{2G_0^2} + \frac{H_A^2}{G_0^2} + \frac{H_B^2}{G_0^2} \right] \cdot \sigma_g^2. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Da se dobije numerički uvid o utjecaju ubrzanja sile teže razmotren je utjecaj na ortometrijsku visinu od 1000 m dobivenu niveliranjem 10 nivelmanskih strana od po 100 m visinske razlike, kao što pokazuje slika 7. Za taj slučaj vrijedi sljedeće:

$$H_g^{1000} = 0 + \Delta H_g^{0,100} + \Delta H_g^{100,200} + \dots + \Delta H_g^{900,1000} \tag{3.12}$$

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = (\sigma^2_{\Delta H_g^{0,100}} + \sigma^2_{\Delta H_g^{100,200}} + \dots + \sigma^2_{\Delta H_g^{900,1000}}) \quad (3.11) \text{ i predhodni izraz daje:}$$

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = \left[ \left( \frac{-100^2}{2G_0^2} + \frac{0^2}{G_0^2} + \frac{100^2}{G_0^2} \right) + \left( \frac{-100^2}{2G_0^2} + \frac{100^2}{G_0^2} + \frac{200^2}{G_0^2} \right) + \dots + \left( \frac{-100^2}{2G_0^2} + \frac{900^2}{G_0^2} + \frac{1000^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2 \tag{3.13}$$

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = \left[ n \left( - \frac{\Delta H_{AB}^2}{2G_0^2} + 2 \cdot \frac{100^2}{G_0^2} + 2 \cdot \frac{200^2}{G_0^2} + \dots + 2 \cdot \frac{900^2}{G_0^2} + \frac{1000^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2. \tag{3.14}$$

Kad se uvrsti vrijednost za  $G_0 = 9,805174 \text{ ms}^{-2}$  dobije se:

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = 6916892989 \cdot \sigma_g^2,$$

odnosno

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sigma^2_{H_g^{1000}}}{6916892989}}. \tag{3.15}$$

Analogna računanja se mogu uraditi kad se za visinske razlike uzmu vrijednosti od 50 i 25 metara. Rezultati takvih računanja pokazana su u tablici 3. Razmotrimo visinske razlike od 50 m. Tada izraz (3.5) glasi:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{H_g^{1000}} &= (\sigma^2_{\Delta H_g^{0,50}} + \sigma^2_{\Delta H_g^{50,100}} + \dots + \sigma^2_{\Delta H_g^{950,1000}}) = \\
&= \left[ \left( \frac{-50^2}{2G_0^2} + \frac{0^2}{G_0^2} + \frac{50^2}{G_0^2} \right) + \left( \frac{-50^2}{2G_0^2} + \frac{50^2}{G_0^2} + \frac{100^2}{G_0^2} \right) + \dots + \left( \frac{-50^2}{2G_0^2} + \frac{950^2}{G_0^2} + \frac{1000^2}{G_0^2} \right) \right] \cdot \sigma_g^2,
\end{aligned}$$

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = \left[ n(-) \frac{50^2_{AB}}{2G_0^2} + 2 \cdot \frac{50^2}{G_0^2} + 2 \cdot \frac{100^2}{G_0^2} + 2 \cdot \frac{150^2}{G_0^2} + \dots + 2 \cdot \frac{950^2}{G_0^2} + \frac{1000^2}{G_0^2} \right] \cdot \sigma_g^2,$$

ili općenito:

$$\sigma^2_{H_g^{1000}} = \left[ n(-) \frac{\Delta H^2_{AB}}{2G_0^2} + \frac{2}{G_0^2} \cdot (H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_{n-1}^2) + \frac{1}{G_0^2} H_n^2 \right] \cdot \sigma_g^2, \quad n = \frac{1000}{\Delta H}. \quad (3.16)$$

Sad se može izračunati tražena točnost mjerenog ubrzanja sile teže kao funkcija izabranog standardnog odstupanja (točnosti) prave ortometrijske visine, kao što je pokazano u tablici 3.

Iz tabele 3 vidi se, da za točnost prave ortometrijske visine od 1 mm točke čija visina iznosi 1000 m, potrebno je mjeriti ubrzanje sile teže s točnošću od oko 0,2 mGal.

Tablica 3: Točnost ubrzanja sile teže kao funkcija točnosti prave ortometrijske visine

Standardno odstupanje prave ort. vis. od 1000 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=100 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=50 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=25 m
0,000 01 m	3,8 · 10 <sup>-8</sup> = 0,004 mGal	2,686 · 10 <sup>-8</sup> = 0,003 mGal	1,899 · 10 <sup>-8</sup> = 0,002 mGal
0,000 1 m	3,8 · 10 <sup>-7</sup> = 0,038 mGal	2,686 · 10 <sup>-7</sup> = 0,027 mGal	1,899 · 10 <sup>-7</sup> = 0,019 mGal
0,000 5 m	1,9 · 10 <sup>-6</sup> = 0,190 mGal	1,343 · 10 <sup>-6</sup> = 0,134 mGal	9,49 · 10 <sup>-7</sup> = 0,095 mGal
0,001 m	3,8 · 10 <sup>-6</sup> = 0,380 mGal	2,686 · 10 <sup>-6</sup> = 0,269 mGal	1,899 · 10 <sup>-6</sup> = 0,189 mGal
0,01 m	3,802 · 10 <sup>-5</sup> = 3,802 mGal	2,686 · 10 <sup>-5</sup> = 2,686 mGal	1,899 · 10 <sup>-5</sup> = 1,899 mGal

To je veliki zahtjev za točnost ubrzanja sile teže. Drugim riječima, ova točnost može se postići samo mjerenjem ubrzanja sile teže uzduž visinskih vlakova. Karte anomalija ubrzanja sile teže ne daju točnost od 0,189 mGal (Bilajbegović i dr., 1989).

U II NVT bivše Jugoslavije mjerena su ubrzanja sile teže uzduž (cca 40%) nivelmanskih vlakova, lociranim većinom u zapadnom dijelu bivše države. Uspoređujući mjerene vrijednosti ubrzanja sile teže i one procijenjene iz karata Fayeovih anomalija (Bilajbegović i dr., 1989), dobivena je standardna devijacija ubrzanja sile teže određenog iz karata Fayeovih anomalija oko 4,6 mGal. Ova vrijednost je daleko veća od zahtijevane točnosti od 0,189 mGal (tablica 3), što u postojećoj situaciji isključuje uvođenje ili izbor pravog ortometrijskog sustava visina u Bosni i Hercegovini.

### 3.1.3 Utjecaj visina krajnjih točaka nivelmanske strane na točnost računanja pravih ortometrijskih visinskih razlika, odnosno visina

Prava ortometrijska visina točke *B* definirana je ranije formulom (2.15):

$$H_g^B = \frac{1}{g_m} \int_0^B g dh. \quad (2.15)$$

Za točku *A* vrijedi analogan izraz:

$$H_g^A = \frac{1}{g_m^A} \int_0^A g dh.$$

Visinska razlika računa se po izrazu:

$$H_g^B - H_g^A = \Delta H_g^{AB} = \frac{1}{g_m^B} \int_0^B g dh - \frac{1}{g_m^A} \int_0^A g dh = \frac{1}{g_m^{AB}} \int_A^B g \cdot dh = \frac{(g_B + g_A)}{\frac{g_m^A + g_m^B}{2}} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} = \frac{g_B + g_A}{g_m^A + g_m^B} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB}. \quad (3.17)$$

sa:  $g_m^{AB} = \frac{g_m^A + g_m^B}{2}$ , odnosno:  $g_m^A = g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2}$ , kao i  $g_m^B = g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2}$ .

Za GRS 80 sustav vrijedi sljedeće:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho = -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} + 4\pi G\rho.$$

Numerička vrijednost gradijenta ubrzanja sile teže za Sarajevo iznosi ( $\varphi = 43^\circ 52'$ ):

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{d\gamma}{dh} + 4\pi G\rho = -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} + 4\pi G\rho = -8,468375433 \cdot 10^{-7}.$$

Derivacija (3.17) po H daje:

$$d\Delta H_g^{AB} = \frac{(g_B + g_A) \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{dH^A}{2} + \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{dH^B}{2} \right)}{\left[ \left( g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} \right) + \left( g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} \right) \right]^2}, \quad (3.18)$$

odnosno

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \frac{\frac{1}{4} \left( (g_B + g_A) \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \right)^2 \cdot (\sigma_{H^A}^2 + \sigma_{H^B}^2)}{\left[ \left( g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} \right) + \left( g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} \right) \right]^4}.$$

Uvođenjem aproksimacija  $\sigma_{H^A} \approx \sigma_{H^B} \approx \sigma_H$  dobije se:

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \frac{\frac{1}{2} \left( (g_B + g_A) \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \right)^2 \cdot \sigma_H^2}{\left[ \left( g_A - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^A}{2} \right) + \left( g_B - \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{H^B}{2} \right) \right]^4}. \quad (3.19)$$

Preuređenje (3.19) daje:

$$\sigma_{\Delta H_g^{AB}}^2 = \frac{\left( (g_A + g_B) \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} \cdot \frac{\partial g}{\partial h} \right)^2 \cdot \sigma_H^2}{2 \left[ (g_A + g_B)^2 - \frac{\partial g}{\partial h} (H^A + H^B) \cdot (g_A + g_B) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial h} \right)^2 \cdot (H^A + H^B)^2 \right]^2}. \quad (3.20)$$

Ako se i u ovom slučaju primijeni zakon o prirastu pogrešaka (3.5) dobije se:

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = \sigma_{\Delta H_g^{0,25}}^2 + \sigma_{\Delta H_g^{25,50}}^2 + \dots + \sigma_{\Delta H_g^{9250,1000}}^2. \quad (3.6)$$

Zbog uvida utjecaja visina krajnjih točaka na točnost pravih ortometrijskih visina izračunajmo pogrešku visinske razlike od 500 do 525 metara (što bi bila realna situacija u Sarajevu). Vrijednost računatog gradijenta ubrzanja sile teže uzeta je za Sarajevo  $\frac{\partial g}{\partial h} = -8,468375433 \cdot 10^{-7}$ , a razlika ubrzanja sile teže susjednih repera, koji se nalaze u pravcu jug sjever, na razmaku od 1km, s visinskom razlikom od 25 m, izračunata je primjenom formule za gradijent ubrzanja sile teže i razliku normalnog ubrzanja između susjednih repera po formuli (2.21) za Sarajevo. Ova izračunata razlika ubrzanja sile teže iznosi  $\Delta g = -1,303264388 \cdot 10^{-5}$ .

Koristeći izraz (3.20) i vrijednosti  $g_A = 9,804913347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  i  $g_B = 9,804900314 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , za visinsku razliku između repera na visinama od 500 i 525 m, dobije se njena standardna devijacija kao što slijedi:

$$\sigma_{\Delta H_g^{500,525}}^2 = 2,239099645 \cdot 10^{-10} \cdot \sigma_H^2.$$

Formulu (3.20) bi trebalo primijeniti za sve visinske razlike od: 0m-25 m, 25m-50 m, 50 m-75 m, ... , 975m-1000 m i to treba uvesti u formulu za računanje standardne devijacije (3.6). Kako se visinska razlika između repera visine 500 i 525 m nalazi približno u sredini visinske razlike od 0m-1000 m, može se pretpostaviti da svaka visinska razlika ima približno isti utjecaj. Tada iz izraza (3.20) i (3.6) slijedi:

$$\sigma_{H_g^{1000}}^2 = 40 \cdot \sigma_{\Delta H_g^{500,525}}^2 = 40 \cdot 2,239099645 \cdot 10^{-10} \cdot \sigma_H^2, \text{ odnosno:}$$

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\sigma_{H_g^{1000}}^2 = 0,001^2}{40 \cdot 2,239099645 \cdot 10^{-10}}} = 10,6 \text{ m.}$$

U prethodnom izrazu se može mijenjati željena točnost ortometrijske visine od 1000 m, što je učinjeno i pokazano u tablici 4.

Tablica 4: Zahtijevana točnost visina krajnjih točaka nivelmanske strane

Standardno odstupanje ortometrijske visine od 1000 m $\sigma_{H_g^{1000}}$ u m	Standardno odstupanje visina krajnjih točaka niv. strane $\sigma_H$ u metrima, za nivelirane visinske razlike po 25 m
0,00001	0,1 m
0,0001	1,1 m
0,0005	5,3 m
0,001	10,6 m
0,01	105,7 m

Iz tablice 4 slijedi da za preračunavanje mjerenih u prave ortometrijske visinske razlike dovoljno poznavati približnu točnost visina krajnjih repera.

### 3.2 Utjecaj relevantnih ulaznih podataka na točnost normalnih visinskih razlika, odnosno visina

Utjecaj gustoće Zemljinog sloja između geoida i fizičke površine po definiciji normalnih visina je isključen, znači ove visine zadovoljavaju drugi uvjet visinskih sustava koji je naveden u poglavlju 2.

#### 3.2.1 Utjecaj ubrzanja sile teže na točnost normalnih visina

Ova razmatranja počinju s formulom za računanje normalnih visinskih razlika:

$$\Delta H_N^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi_m d\varphi) \cdot H_M + \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB} \quad (2.29)$$

Ako se u (2.29) uvedu sljedeći izrazi:

$$\gamma_m = \frac{\gamma_m^A + \gamma_m^B}{2}, \quad (g - \gamma)_M = \frac{(g_B - \gamma^B) + (g_A - \gamma^A)}{2},$$

dobije se:

$$\Delta H_N^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi d\varphi) \cdot H_M + \frac{(g_B - \gamma^B) + (g_A - \gamma^A)}{2\gamma_m} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB},$$

$$\Delta H_N^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi d\varphi) \cdot H_M + \left( \frac{g_B + g_A}{2\gamma_m} - \frac{\gamma^B + \gamma^A}{2\gamma_m} \right) \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB},$$

$$\Delta H_N^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi d\varphi) \cdot H_M + \frac{g_B + g_A}{2\gamma_m} \cdot \Delta H_{gem}^{AB} - \frac{\gamma^B + \gamma^A}{2\gamma_m} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB}. \quad (3.21)$$

Derivacija (3.21) po  $g$  daje:

$$d\Delta H_N^{AB} = \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2\gamma_m} \cdot dg_A + \frac{\Delta H_{mjer.}^{AB}}{2\gamma_m} \cdot dg_B. \quad (3.22)$$

Primjenom zakona o prirastu pogrešaka na izraz (3.22) slijedi:

$$\sigma^2_{\Delta H_N^{AB}} = \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{4\gamma_m^2} (\sigma_{g_A}^2 + \sigma_{g_B}^2). \quad (3.24)$$

Uz pretpostavku da je  $\sigma_{g_A}^2 \approx \sigma_{g_B}^2 \approx \sigma_g^2$  dobije se:

$$\sigma^2_{\Delta H_N^{AB}} = \frac{(\Delta H_{mjer.}^{AB})^2}{2\gamma_m^2} \cdot \sigma_g^2. \quad (3.25)$$

Da se dobije numerički uvid o utjecaju ubrzanja sile teže razmotren je utjecaj na normalnu visinu od 1000 m dobivenu niveliranjem 10 visinskih razlika od 100 m, (situacija slična pokazanoj na slici 7). U tom slučaju vrijedi:

$$H_N^{1000} = H_N^0 + \Delta H_N^{100,200} + \Delta H_N^{200,300} + \dots + \Delta H_N^{900,1000}, \quad (3.26)$$

odnosno

$$\sigma^2_{H_N^{1000}} = \sigma^2_{H_N^0} + \sigma^2_{\Delta H_N^{100,200}} + \sigma^2_{\Delta H_N^{200,300}} + \dots + \sigma^2_{\Delta H_N^{900,1000}}, \quad \text{te s } (3.25) \quad (3.27)$$

$$\sigma^2_{H_N^{1000}} = \frac{10 \cdot (\Delta H_{gem}^{AB})^2}{2\gamma_m^2} \sigma_g^2 = \frac{n \cdot (\Delta H_{gem}^{AB})^2}{2\gamma_m^2} \sigma_g^2 = \frac{5 \cdot (\Delta H_{gem}^{AB})^2}{\gamma_m^2} \sigma_g^2, \quad (3.28)$$

odnosno

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sigma^2_{H_N^{1000}}}{n(\Delta H_{AB})^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{H_N^{1000}}}{5(100_{AB})^2}}, \quad n = \frac{1000}{\Delta H} = 10, \text{ tablica 5.} \quad (3.29)$$

Jednostavnosti radi, u tablici 5 i u izrazima (3.28) i (3.29) za srednje vrijednosti normalnog ubrzanja sile teže uzeta je vrijednost za Sarajevo.

Tablica 5: Točnost ubrzanja sile teže kao funkcija točnosti normalne visine od 1000 m

Stand. odstupanje prave ort. vis. od 1000 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=100 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=50 m	Stand. odstupanje ubrzanja sile teže u ms <sup>-2</sup> za ΔH=25 m
0,000 01	$4,385 \cdot 10^{-7} = 0,044 \text{ mGal}$	$6,201 \cdot 10^{-7} = 0,062 \text{ mGal}$	$8,770 \cdot 10^{-7} = 0,088 \text{ mGal}$
0,000 1	$4,385 \cdot 10^{-6} = 0,439 \text{ mGal}$	$6,201 \cdot 10^{-6} = 0,620 \text{ mGal}$	$8,770 \cdot 10^{-6} = 0,877 \text{ mGal}$
0,000 5	$2,193 \cdot 10^{-5} = 2,193 \text{ mGal}$	$3,101 \cdot 10^{-5} = 3,101 \text{ mGal}$	$4,385 \cdot 10^{-5} = 4,385 \text{ mGal}$
0,001	$4,385 \cdot 10^{-5} = 4,385 \text{ mGal}$	$6,201 \cdot 10^{-5} = 6,201 \text{ mGal}$	$8,770 \cdot 10^{-5} = 8,770 \text{ mGal}$
0,01	$4,385 \cdot 10^{-4} = 43,85 \text{ mGal}$	$6,201 \cdot 10^{-4} = 62,01 \text{ mGal}$	$8,770 \cdot 10^{-4} = 87,70 \text{ mGal}$

Slična razmatranja mogu se izvesti uzimajući nivelirane visinske razlike od 50, odnosno 25 metara, te su rezultati takvih računanja također pokazana u tablici 5.

Iz tablice 5 očigledno je, da za točnost normalne visine od 1 mm za točke čija visina iznosi 1000 m treba mjeriti ubrzanje sile teže s točnošću od 4,4-8,8 mGal. Drugim riječima karte Fayeovih anomalija mogu se koristiti za računanja normalnih (Molodenski) visina.

### 3.2.2 Utjecaj visina krajnjih točaka nivelmanske strane na točnost računanja normalnih visinskih razlika, odnosno visina

Razmatranja opet počinju od formule za računanja normalnih visinskih razlika:

$$\Delta H_N^{AB} = \Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi_m \cdot d\varphi) \cdot H_m + \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \cdot \Delta H_{mjer.}^{AB}, \quad (2.29)$$

gdje su:

$$H_m = \frac{H_A + H_B}{2}$$

i

$$(g - \gamma)_M = \frac{(g_B + g_A) - (\gamma_B + \gamma_A)}{2}.$$

Za ovu analizu uzeta su numeričke vrijednosti za:

$$\gamma_m = \gamma_0^{\varphi=43^\circ 52''} = 9,805174 \text{ ms}^{-2}.$$

Diferenciranjem izraza (2.29) po visinama krajnjih točaka i po mjerenoj visinskoj razlici dobije se:

$$d\Delta H_N^{AB} = d\Delta H_{mjer.}^{AB} - (0,005276805941 \sin 2\varphi_m \cdot d\varphi) \cdot \left( \frac{dH_A + dH_B}{2} \right) + \frac{(g_B + g_A) - (\gamma_B + \gamma_A)}{2\gamma_m} \cdot d\Delta H_{mjer.}^{AB}. \quad (3.30)$$

Za parametre  $\varphi_m = 43^\circ 52''$ ,  $s = 1,5 \text{ km} \Rightarrow \Delta\varphi = 48,328''$ ,  $\alpha'' = \frac{s}{R} \cdot \rho'' = 48,328''$  (gdje je  $R$  radijus Zemlje), te prelaskom na varijance slijedi:

$$\sigma^2_{\Delta H_N^{AB}} = \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2 \cdot \sigma_{H_A}^2 + \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2 \cdot \sigma_{H_B}^2 + \left[ \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \right]^2 \cdot \sigma_{\Delta H_{mjer.}}^2.$$

Ako se uvedu aproksimacije:

$$\sigma_{H_A} \approx \sigma_{H_B} \approx \sigma_H,$$

iz prethodne formule slijedi:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\Delta H_N^{AB}} &= 2 \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2 \cdot \sigma_H^2 + \left[ \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \right]^2 \cdot \sigma_{\Delta H_{mjer.}}^2 \\ &= 2 \cdot 3,852744596 \cdot 10^{-13} \cdot \sigma_H^2 + 1,040134284 \cdot 10^{-8} \cdot \sigma_{\Delta H_{mjer.}}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Numeričke vrijednosti su računane za  $\varphi = 43^\circ 52'$  (širinu Sarajeva).

Polazi se s pretpostavkom da se visina točke  $B$  dobije iz deset niveliranih visinskih razlika od 100 m počevši od nulte točke, kao što pokazuje slika 7. Tada se visine, odnosno standardno odstupanje normalne visine, računaju pomoću sljedećih izraza:

$$H_N^{1000} = H_N^0 + \Delta H_N^{100,200} + \Delta H_N^{200,300} + \dots + \Delta H_N^{900,1000}$$

odnosno

$$\sigma^2_{H_N^{1000}} = \sigma^2_{H_N^0} + \sigma^2_{\Delta H_N^{100,200}} + \sigma^2_{\Delta H_N^{200,300}} + \dots + \sigma^2_{\Delta H_N^{900,1000}}.$$

Jednostavnosti radi, uzeto je da je približno jednak utjecaj visina krajnjih točaka na sve visinske razlike, tada izraz (3.31) prelazi u:

$$\sigma^2_{H_N^{1000}} = n \cdot \sigma_{\Delta H_N}^2 = n \cdot \left\{ 2 \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2 \cdot \sigma_H^2 + \left[ \frac{(g - \gamma)_M}{\gamma_m} \right]^2 \cdot \sigma_{\Delta H_{mjer.}}^2 \right\}. \quad (3.32)$$

Ako se razdvoje utjecaji točnosti visina krajnjih točaka i mjerene visinske razlike dobije se:

$$\sigma^2_{H_N^{1000}} = n \cdot \sigma_{\Delta H_N}^2 = n \cdot \left\{ 2 \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2 \cdot \sigma_H^2 \right\}, \quad (3.33)$$



odnosno

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\sigma^2_{H_N^{1000}}}{n \cdot 2 \left[ \frac{(0,005276805941 \sin 2\varphi_m) \cdot 48,328''}{2\rho''} \right]^2}}. \quad (3.34)$$

Tražena točnost visina krajnjih točaka nivelmanske strane za računanje normalnih visina prikazana je u tablici 6. Također, traženu točnost mjerenih visinskih razlika za računanje normalnih visina daje izraz (3.35), a rezultati računanja pokazani su u tablici 6.

$$\sigma_{\Delta H} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{H_N^{1000}}}{n \cdot \left[ \frac{g - \gamma}{\gamma_m} \right]^2}}. \quad (3.35)$$

Za računanja pokazana u tablici 6 usvojene su sljedeće numeričke vrijednosti:

$$(g - \gamma)_M = 100 \text{ mGal} \text{ i } \gamma_m = \gamma_0^{\varphi=43^\circ 52''} = 9,805174 \text{ ms}^{-2}.$$

Tablica 6: Tražena točnost visina krajnjih točaka nivelmanske strane i mjerenih visinskih razlika za računanja apsolutne normalne visine točke od 1000 m

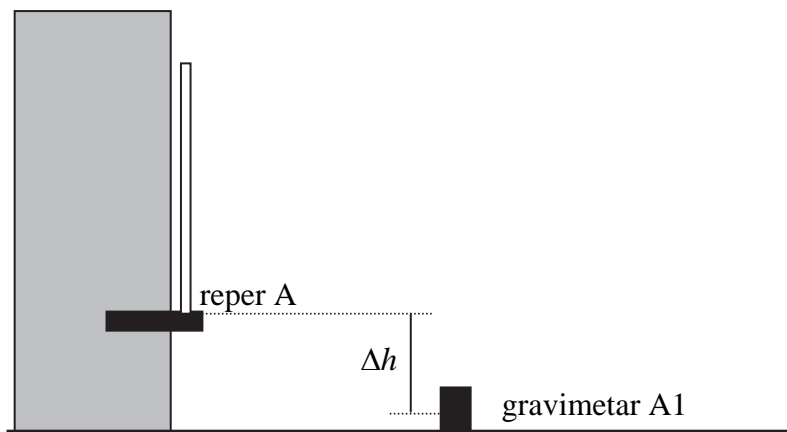
Standardno odstupanje normalne visine točke od 1000 m $\sigma_{H_N^{1000}}$ u (m)	Standardno odstupanje visine krajnjih točaka $\sigma_H$ nivelmanske strane za visinske razlike od			Standardno odstupanje mjerene visinske razlike $\sigma_{\Delta H}$ za prevođenje mjerenih vis. razlika u normalne visinske razlike od		
	$\Delta H = 100$ m	$\Delta H = 50$ m	$\Delta H = 25$ m	$\Delta H = 100$ m	$\Delta H = 50$ m	$\Delta H = 25$ m
0,00001	3,6 m	2,5 m	1,8 m	0,031 m	0,022 m	0,015 m
0,0001	36,0 m	25,5 m	18,0 m	0,310 m	0,219 m	0,155 m
0,0005	180,1 m	127,4		1,550 m	0,96 m	0,775 m
0,001	360,2 m	254,7 m	180,1 m	3,101 m	2,193 m	1,550 m
0,01	3602,5 m	2547,3 m	1801,2 m	31,06 m	21,925 m	15,503 m

Tablica 6 pokazuje da se prevođenje niveliranih visinskih razlika u normalne visinske razlike može obaviti približnim visinama krajnjih točaka nivelmanske strane.

Međutim, rezultati pokazani u tablici 3 traže odgovor na pitanje treba li mjerena ubrzanja sile teže na tlu reducirati na visine repa (tj. biljega visina)? Taj je problem razmatran u sljedećem poglavlju.

#### 4. TREBA LI MJERENA UBRZANJA SILE TEŽE NA TLU REDUCIRATI NA VISINE REPERA (BILJEGA VISINA)?

Razmatranje počinje slikom 8.



Slika 8: Visinska razlika između repera i mjernog sustava gravimetra

Kako se gravimetar i reper nalaze u zraku, ovdje se može izjednačiti vertikalni gradijent ubrzanja sile teže s vertikalnim gradijentom normalnog ubrzanja sile teže:

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{d\gamma}{dh}, \quad (4.1)$$

a razlika ubrzanja sile teže između točaka A i A<sub>1</sub> računa se po formuli:

$$\Delta g = g_A - g_{A1} = g_{A1} + \frac{\partial g}{\partial h} \cdot (H_A - H_{A1}) - g_{A1} \quad (4.2)$$

$$\Delta h = H_A - H_{A1}. \quad (4.3)$$

Za GRS80 sustav vrijedi:

$$\Delta g = + \left[ -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} \right] \cdot \Delta h \quad (4.4)$$

odnosno

$$d\Delta g = \left[ -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} \right] \cdot d(\Delta h) \quad (4.5)$$

i

$$\sigma_{\Delta g}^2 = \left[ -0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} \right]^2 \cdot \sigma_{\Delta h}^2. \quad (4.6)$$

Za prave ortometrijske visine dobije se:

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{\frac{\sigma_{\Delta g}^2}{\left[-0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5}\right]^2}}. \quad (4.7)$$

Rezultati računanja po gornjim formulama prikazani su u tablici 7.

Za normalne ili visine Molodenskog analogno slijedi izraz:

$$\sigma_{\Delta h}^2 = \frac{\sigma_{\Delta \gamma}^2}{\left[-0,30877(1 - 0,00139 \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5}\right]^2}. \quad (4.8)$$

Rezultati računanja po gornjoj formuli za normalne visine pokazane su u tablici 8.

Tablica 7: Dopuštena visinska razlika između repera i mjernog sustava gravimetra kao funkcija standardnog odstupanja prave ortometrijske visine od 1000 m za različite nivelirane visinske razlike.

Stand. odstupanje visine od 1000 m u metrima	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=100$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=50$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=25$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)
0,000 01	$3,8 \cdot 10^{-8} = 0,004 \text{ mGal}$	0,012	$2,686 \cdot 10^{-8} = 0,003 \text{ mGal}$	0,0087	$1,899 \cdot 10^{-8} = 0,002 \text{ mGal}$	0,006
0,000 1	$3,8 \cdot 10^{-7} = 0,038 \text{ mGal}$	0,123	$2,686 \cdot 10^{-7} = 0,027 \text{ mGal}$	0,087	$1,899 \cdot 10^{-7} = 0,019 \text{ mGal}$	0,062
0,000 5	$1,9 \cdot 10^{-6} = 0,190 \text{ mGal}$	0,616	$1,343 \cdot 10^{-6} = 0,134 \text{ mGal}$	0,435	$9,49 \cdot 10^{-7} = 0,095 \text{ mGal}$	0,308
0,001	$3,8 \cdot 10^{-6} = 0,380 \text{ mGal}$	1,232	$2,686 \cdot 10^{-6} = 0,269 \text{ mGal}$	0,870	$1,899 \cdot 10^{-6} = 0,189 \text{ mGal}$	0,615
0,01	$3,802 \cdot 10^{-5} = 3,802 \text{ mGal}$	12,315	$2,686 \cdot 10^{-5} = 2,686 \text{ mGal}$	8,705	$1,899 \cdot 10^{-5} = 1,899 \text{ mGal}$	6,154

Iz tablice 7 je vidljivo da za točnost od 0,001 m prave ortometrijske visine od 1000 m treba visinska razlika između repera i mjernog sustava gravimetra biti manja od 0,615 m. U protivnom potrebno je mjerena ubrzanja sile teže reducirati na visine krajnjih točaka repera.

Tablica 8: Dopuštena visinska razlika između repera i mjernog sustava gravimetra kao funkcija standardnog odstupanja normalne visine od 1000 m za različite nivelirane visinske razlike.

Stand. odstupanje visine od 1000 m u metrima	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=100$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=50$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)	Standardno odstupanje ubrzanja sile teže u $\text{ms}^{-2}$ za $\Delta H=25$ m	$\sigma_{\Delta h}$ (m)
0,000 01	$4,385 \cdot 10^{-7} = 0,044$ mGal	0,142	$6,201 \cdot 10^{-7} = 0,062$ mGal	0,201	$8,770 \cdot 10^{-7} = 0,088$ mGal	0,284
0,000 1	$4,385 \cdot 10^{-6} = 0,439$ mGal	1,421	$6,201 \cdot 10^{-6} = 0,620$ mGal	2,010	$8,770 \cdot 10^{-6} = 0,877$ mGal	2,842
0,000 5	$2,193 \cdot 10^{-5} = 2,193$ mGal	7,107	$3,101 \cdot 10^{-5} = 3,101$ mGal	10,049	$4,385 \cdot 10^{-5} = 4,385$ mGal	14,211
0,001	$4,385 \cdot 10^{-5} = 4,385$ mGal	14,211	$6,201 \cdot 10^{-5} = 6,201$ mGal	20,096	$8,770 \cdot 10^{-5} = 8,770$ mGal	28,422
0,01	$4,385 \cdot 10^{-4} = 43,85$ mGal	142,11	$6,201 \cdot 10^{-4} = 62,01$ mGal	200,963	$8,770 \cdot 10^{-4} = 87,70$ mGal	284,22

Iz tablice 8 je vidljivo da za točnost od 0,001 m normalne visine od 1000 m treba visinska razlika između repera i mjernog sustava gravimetra biti manja od 14,211 m. U protivnom potrebno je mjerena ubrzanja sile teže reducirati na visine krajnjih točaka repera.

Tablice 7 i 8 pokazuju veliku osjetljivost pravih ortometrijskih visina na visinsku razliku između gravimetra i krajnjih točaka (repera) nivelmanske strane. Ukoliko se radi o visokim reperima, problematično je korištenje karata Fayeovih ili Bougerovih anomalija ubrzanja sile teže za računanja pravih ortometrijskih visina.

## 5. ZAKLJUČAK

Na osnovu detaljno provedenih razmatranja u poglavljima 3 i 4, može se preporučiti državama koje za svoj teritorij nemaju trodimenzionalne modele gustoće između geoida i fizičke površine Zemlje i koje nemaju mjerena ubrzanja sile teže uzduž nivelmanskih vlakova, da ne uvide prave ortometrijske visine u državni nivelman.

Također, na osnovu istraživanja u poglavljima 3 i 4, te uvjetima iz poglavlja 2 preporučuje se za države koje nemaju trodimenzionalne modele gustoće svog teritorija između geoida i fizičke površine Zemlje i koje nemaju mjerena ubrzanja sile teže uzduž nivelmanskih vlakova, uvođenje normalnih visina u državni nivelman. Uzimajući u obzir današnje raspoložive podatke o gustoći tla između geoida i fizičke površine Zemlje i o ubrzanju sile teže na području Bosne i Hercegovine, svrsishodno je uvesti sustav normalnih (Molodenski) visina u III NVT Bosne i Hercegovine. Ova razmatranja se mogu primijeniti na sve države a posebno na sve države koje su nastale iz bivše Jugoslavije.

## LITERATURA

Bilajbegović, A., Klak, S., Sredić, S., Škeljo, Lj. (1986): II Nivelman visoke točnosti SR: Bosne i Hercegovine, Crne Gore, Hrvatske, Slovenije i SAP Vojvodine, 1970-1973.

Bilajbegović, A., (1984): Praktično računanje normalnih i normalnih ortometrijskih visina, Geodetski list 1984, 7-9, 165-178.

Bilajbegović, A., Hećimović, Ž., Bačić, Ž. (1989): Istraživanja o izboru sustava visina za NVT SFRJ s obzirom na tačnost ubrzanja sile teže, Geodetski list 1989, 4-6, 97-106.

Bilajbegović, A. Bratuljević, N., Bačić, Ž., Hećimović, Ž. (1991): The 2nd Yugoslav High Precision Leveling Network, Workshop on Vertical positioning, Hannover 8.-12.10.1990.

Bilajbegović, A., Marchesini, C. (1991): Jugoslavenski vertikalni datum i preliminarno povezivanje nove Jugoslavenske nivelmanske mreže s austrijskom i talijanskom, Geodetski list 1991, 7-9, 233-248.

Bilajbegović, A., Bačić, Ž., Stepan, V. (1992): Precizni nivelman Hrvatske, Bosne i Hercegovine i Slovenije. Zbornik Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u povodu 30. obljetnice samostalnog djelovanja 1962-1992, str. 157-164.

Bilajbegović, A., Mulić, M., Omićević, Dž. Tuno, N., Vrce, E., Ključanin, S. (2008): Studija o nivelmanu visoke točnosti (NVT) Bosne i Hercegovine - Obnova i djelimično ponavljanje drugog nivelmana visoke točnosti (II NVT iz 1973). Univerzitet u Sarajevu, Građevinski Fakultet, Institut za geodeziju i geoinformatiku, Sarajevo 2008, str. 1-161.

DIN (1999): DIN SN ENV 13005 (Vornorm), Ausgabe 2000-07: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen, DIN e. V., Berlin 1999.

Heck, B. (2003): Landesvermessung moderne Methode. Herbert Wichmann Verlag, Heilderberg 2003.

Idhe, I. (2006): Global Vertical Reference System -Integration of Gravity and Geometric Reference. FIG Congress and INTERGEO 2006 Erdmessungsforum 12 October 2006 Munich.

Torge, W., Müller, J. (2012): Geodesy. Walter de Gruyter GmbH & KG, Berlin/Boston 2012.

### ***Autori:***

#### ***Prof. Dr.-Ing. Asim Bilajbegović***

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden, Fakultät Geoinformation  
PF120701, 01008 Dresden  
Deutschland  
E-mail: bilajbegovic@htw-dresden.de

#### ***Doc.dr.sc. Medžida Mulić, dipl.inž.geod.***

Građevinski fakultet, Univerzitet u Sarajevu  
Patriotske lige 30, 71000 Sarajevo  
Bosna i Hercegovina  
E-mail: medzida\_mulic@gf.unsa.ba